

Série n° 7

Exercice 1.

Résoudre les systèmes :

$$\begin{aligned} a) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases} ; b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases} ; c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \\ d) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases} ; e) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases} . \end{aligned}$$

Exercice 2.

Résoudre les systèmes suivants par la règle de Cramer :

$$a) \begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases} ; b) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases} ; c) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases} .$$

Exercice 3.

Résoudre les systèmes :

$$a) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} ; b) \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases} .$$

Exercice 4.

Résoudre les systèmes à un paramètre m :

$$a) \begin{cases} x_1 + x_2 + (2m - 1)x_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3(m + 1) \end{cases} ; b) \begin{cases} x_1 - mx_2 + m^2x_3 = m \\ mx_1 - m^2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 - m^3x_3 = 1 \end{cases} .$$

Exercice 1.

a) La matrice du système :

$$(a) \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; sa matrice augmentée est : $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Réduisons la matrice \tilde{A} en une matrice "étagée", par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$rg(A) = 2$ et $rg(\tilde{A}) = 3$; donc le système (a) n'a pas de solution.

b) La matrice et la matrice augmentée du système

$$(b) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = -2 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$$

sont respectivement $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftrightarrow L_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 & -6 \\ 0 & 0 & 14 & 14 \end{pmatrix}.$$

Comme $rg(A) = rg(\tilde{A}) (= 3)$, le système (b) admet au moins une solution; l'ensemble S des solutions de (b) coïncide avec celui du système :

$$(b') \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_2 - 5x_3 = -6 \\ x_3 = 1 \end{cases};$$

ainsi $S = \{(x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 1)\}$.

c) Le système

$$(c) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 7x_1 + 6x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

est homogène; sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 5 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 7L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{6}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{4}L_3 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (c) est donc équivalent au système :

$$(c') \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est : $S = \{(x_1 = t, x_2 = -2t, x_3 = t) / t \in \mathbb{R}\}$; c'est la droite passant par l'origine O et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) La matrice du système

$$(d) \begin{cases} -3x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 2 \\ -2x_1 - 2x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$$

est $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; sa matrice augmentée est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow -L_1 + L_3} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 5L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & -2 & 17 \\ 0 & -8 & 1 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2}L_2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 16 & -2 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Le système (d) est incompatible car $rg(A) \neq rg(\tilde{A})$.

e) Pour le système (e) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -4 \end{cases}$ la matrice et la matrice augmentée

sont $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -5 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{matrix}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & -2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$rg(A) = rg(\tilde{A}) (= 2)$; donc le système (e) est compatible et est équivalent au système :

$$(e') \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ -x_2 - 7x_3 = -5 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 11x_3 - 8 \\ x_2 = -7x_3 + 5 \end{cases}$; donc l'ensemble des solutions du système (c) est :

$$S = \{(x_1 = 11t - 8, x_2 = -7t + 5, x_3 = t) / t \in \mathbb{R}\}.$$

C'est la droite passant par le point de coordonnées $(-8, 5, 0)$ et de vecteur directeur $\begin{pmatrix} 11 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 2.

a) Pour le système $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 = -1 \end{cases}$ on a :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{2} = -3.$$

b) La solution du système $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$ est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -8,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -10,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -6;$$

donc $(x_1 = 2, x_2 = \frac{5}{2}, x_3 = \frac{3}{2})$.

c) Pour le système $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 1x_3 = 2 \end{cases}$ on a :

$$x_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}; x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} = 4,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -10 & -13 \\ 0 & -2 & -7 \end{vmatrix} = -44$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & -10 & -8 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = 36$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} = -4;$$

donc $(x_1 = -11, x_2 = 9, x_3 = -1)$.

Exercice 3.

La matrice et la matrice augmentée du système :

$$(a) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8 \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases}$$

sont $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 7 & -5 & -2 & -4 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + 7L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & 10 & 15 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 5L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

Le système (a) est compatible car $rg(A) = rg(\tilde{A}) (= 2)$ et il est équivalent à :

$$(a') \quad \begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -3 \end{cases};$$

donc l'ensemble des solutions de (a) est :

$$S = \{(x_1 = -1 + s + 2t, x_2 = -3 + s + 2t, x_3 = s, x_4 = t) / s, t \in \mathbb{R}\}.$$

b) La matrice et la matrice augmentée du système :

$$(b) \quad \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 6x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 0 \end{cases}$$

sont $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 6 & 8 & 2 & 6 \\ 9 & 12 & 3 & 10 \end{pmatrix}$ et $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 6 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1}} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -11 \end{pmatrix};$$

le système (b) n'a pas de solutions est car $rg(A) \neq rg(\tilde{A})$.

Exercice 4.

a) Le déterminant de la matrice du système (a) $\begin{cases} x_1 + x_2 + (2m-1)x_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + mx_2 + x_3 = 3(m+1) \end{cases}$

est :

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+1 \\ 0 & m-1 & 2(-m+1) \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & -m(2m-1)+1 \\ 0 & 0 & -2m^2-m+3 \end{vmatrix} = (1-m)(-2m^2-m+3) = (1-m)^2(2m+3)$$

1^{er} cas : $m = 1$.

Dans ce cas le système (a) s'écrit :

$$(1) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases};$$

Il est clair que ce système n'admet pas de solutions.

2^{ème} cas : $m = -\frac{3}{2}$.

Dans ce cas le système (a) s'écrit :

$$(2) \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases};$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\tilde{A} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & -5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le système (1) est compatible car $rg(A) = rg(\tilde{A}) (= 2)$; il est équivalent au système :

$$(2') \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$$

dont l'ensemble des solutions est : $S = \{(x_1 = 2t + 1, x_2 = 2t, x_3 = t) / t \in \mathbb{R}\}$; c'est la droite passant par le point de coordonnées (1, 0, 0) et de vecteur directeur

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3^{ème} cas : $(1 - m)(2m + 3) \neq 0$.

Dans ce cas le système (a) est de Cramer; sa solution est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3(m+1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 0 & -2(m-1) \\ 3(m+1) & m & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= 2(m-1)(m-3(m+1)) = -2(m-1)(2m+3), \\
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m(2m-1) \\ 1 & 3(m+1) & 1 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2m-1 \\ 0 & 1-m & 1-m(2m-1) \\ 0 & 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-m & 1-m(2m-1) \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1-m & (2m+1)(-m+1) \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} = (1-m) \begin{vmatrix} 1 & 2m+1 \\ 3m+2 & -2(m-1) \end{vmatrix} \\
&= (1-m)(-2(m-1) - (2m+1)(3m+2)) = -3m(1-m)(2m+3), \\
&\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 3(m+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m & 1-m & 1 \\ 1 & m-1 & 3(m+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ m & 1-m & 1-m \\ 1 & m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} = \\
&\begin{vmatrix} 1-m & 1-m \\ m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} = (1-m) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m-1 & 3m+2 \end{vmatrix} = (1-m)(2m+3); \\
&\text{donc } x_1 = \frac{-2(m-1)(2m+3)}{(1-m)^2(2m+3)} = \frac{2}{1-m}, x_2 = \frac{-3m}{1-m}, x_3 = \frac{1}{1-m}.
\end{aligned}$$

b) Le déterminant de la matrice du système (b) $\begin{cases} x_1 - mx_2 + m^2x_3 = m \\ mx_1 - m^2x_2 + mx_3 = 1 \\ mx_1 + x_2 - m^3x_3 = 1 \end{cases}$

est :

$$\begin{aligned}
\Delta_m &= \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 1 & -m & 1 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = \\
&m(m^2-1) \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix} = m(m^2-1)(1+m^2).
\end{aligned}$$

1^{er} cas : $m = 0$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ 0 = 1 \\ x_2 = 1 \end{cases};$$

(b) n'admet pas de solutions.

2^{ème} cas : $m = 1$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \end{cases};$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\tilde{A} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système (2) est compatible et il est équivalent au système :

$$(2') \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} ;$$

donc ensemble de solutions est : $S = \{(x_1 = 1, x_2 = t, x_3 = t)\}$.

3^{ème} cas : $m = -1$.

Dans ce cas le système (b) s'écrit :

$$(3) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} ;$$

sa matrice est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et sa matrice augmentée est : $\tilde{A} =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 + L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} ;$$

Le système (3) est compatible et il est équivalent au système :

$$(3') \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} ;$$

donc ensemble de solutions est : $S = \{(x_1 = -1, x_2 = t, x_3 = -t)\}$.

4^{ème} cas : $m(m^2 - 1) \neq 0$.

Dans ce cas le système (b) est de Cramer, sa solution est :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}, x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -m & m^2 \\ m & -m^2 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix}}.$$

On a :

$$\begin{vmatrix} m & -m & m^2 \\ 1 & -m^2 & m \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ m & -m & m^2 \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ 0 & -m + m^3 & 0 \\ 1 & 1 & -m^3 \end{vmatrix} =$$

$$- \begin{vmatrix} 1 & -m^2 & m \\ 0 & -m + m^3 & 0 \\ 0 & 1 + m^2 & -m^3 - m \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -m + m^3 & 0 \\ 1 + m^2 & -m^3 - m \end{vmatrix} = (m^3 - m)(m^3 + m^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ m & 1 & m \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^3 \\ m & 1 & -m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^3 \\ 0 & 1-m^2 & -2m^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & m & m^2 \\ 0 & 1-m^2 & m-m^3 \\ 0 & 0 & -m^3 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-m^2)(m^3+m)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ m & -m^2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -m & m \\ 0 & 0 & 1-m^2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1-m) \begin{vmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -(1-m^2)(m^2+1); \text{ donc}$$

$$x_1 = \frac{(m^3-m)(m^3+m)}{m(m^2-1)(1+m^2)} = m, \quad x_2 = \frac{-(1-m^2)(m^3+m)}{m(m^2-1)(1+m^3)} = 1 \text{ et } x_3 = \frac{-(1-m^2)(m^2+1)}{m(m^2-1)(1+m^2)} = \frac{1}{m}.$$



ETUSUP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Diapo
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
MTU
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..